Bài 1: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1|+|z^2-z+1|$. Tính giá trị của M.n

A. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{39}{4}$ C. $3\sqrt{3}$ D. $\frac{13}{4}$

- **Cách 1:**

 $\text{Re}(z)$ là phần thực của số phức z, Im(z) là phần ảo của số phức z, $|z|=1 \Leftrightarrow z.\bar{z}=1$

 - Đặt $t=|z+1|$, ta có: $0=|z|-1\le|z+1|\le|z|+1=2 \Rightarrow t\in[0;2]$
 - $t^2=(1+z)(1+\bar{z})=1+z.\bar{z}+z+\bar{z}=2+2\text{Re}(z)\Rightarrow \text{Re}(z)=\frac{t^2-2}{2}$
 - $|z^2-z+1|=|z^2-z+z.\bar{z}|=|z||z-1+\bar{z}|=|t^2-3|$
 - Xét hàm số: $f(t)=t+|t^2-3|, t\in[0;2]$. Xét 2 TH:

 ⇨ $Maxf(t)=\frac{13}{4}$; $Minf(t)=\sqrt{3} \Rightarrow M.n=\frac{13\sqrt{3}}{4}$

- **Cách 2:**

 - $z=r(\cos x+i\sin x)=a+bi$
 - Do $|z|=1\Rightarrow\begin{cases} z.\bar{z}=|z|^2=1 \\ r=\sqrt{a^2+b^2}=1\end{cases}$
 - $P=\sqrt{2+2\cos x}+|2\cos x-1|$, đặt $t=\cos x\in[-1;1] \Rightarrow f(t)=\sqrt{2+2t}+|2t-1|$
 - TH1: $t\in\left[-1;\frac{1}{2}\right]$

 $f'(t)=\frac{1}{\sqrt{2+2t}}+2>0\Rightarrow\begin{cases} maxf(t)=f(1)=3 \\ minf(t)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}\end{cases}$

 - TH1: $t\in\left[\frac{1}{2};1\right]$

 $f'(t)=\frac{1}{\sqrt{2+2t}}-2=0\Leftrightarrow t=-\frac{7}{8}\Rightarrow maxf(t)=f\left(-\frac{7}{8}\right)=\frac{13}{4}$

 ⇨ $Maxf(t)=\frac{13}{4}$; $Minf(t)=\sqrt{3} \Rightarrow M.n=\frac{13\sqrt{3}}{4}$

Bài 2: Cho số phức z thỏa mãn $\left|z-3-4i\right|=\sqrt{5}$. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|z+2\right|^2-\left|z-i\right|^2$. Tính module số phức $\mathrm{w}=M+mi$.

A. $\left|w\right|=2\sqrt{314}$ B. $\left|w\right|=\sqrt{1258}$ C. $\left|w\right|=3\sqrt{137}$ D. $\left|w\right|=2\sqrt{309}$

- **Cách 1:**
  - $P=4x+2y+3\Rightarrow y=\dfrac{P-4x-3}{2}$
  - $\left|z-3-4i\right|=\sqrt{5}\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-4)^2=5\Leftrightarrow(x-3)^2+\left(\dfrac{P-4x-3}{2}-4\right)^2-5=f(x)$
  - $f'(x)=8(x-3)-8(P-4x-11)=0\Leftrightarrow x=0,2P-1,6\Rightarrow y=0,1P+1,7$
  - Thay vào $f(x)$ ta được: $(0,2P-1,6-3)^2+(0,1P+1,7-4)^2-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}P=33\\P=13\end{array}\right.$
- **Cách 2:**
  - $\left|z-3-4i\right|=\sqrt{5}\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-4)^2=5:(C)$
  - $(\Delta):4x+2y+3-P=0$
  - Tìm P sao cho đường thẳng Δ và đường tròn (C) có điểm chung
    $\Leftrightarrow d(I;\Delta)\le R\Leftrightarrow\left|23-P\right|\le 10\Leftrightarrow 13\le P\le 33$
  - Vậy $MaxP=33$; $MinP=13$
  - $w=33+13i\Rightarrow\left|w\right|=\sqrt{1258}$

Bài 3: Cho số phức z thỏa mãn $\left|z\right|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left|z+1\right|+2\left|z-1\right|$
.

A. $P_{\max}=2\sqrt{5}$ B. $P_{\max}=2\sqrt{10}$ C. $P_{\max}=3\sqrt{5}$ D. $P_{\max}=3\sqrt{2}$

- **Giải: Theo BĐT Bunhiacopxki:**
  - $P=\left|z+1\right|+2\left|z-1\right|\le\sqrt{(1^2+2^2)\left(\left|z+1\right|^2+\left|z-1\right|^2\right)}=\sqrt{10\left(\left|z\right|^2+1\right)}=2\sqrt{5}$

Bài 4: Cho số phức $z=x+yi$ $(x,y\in R)$ thỏa mãn $\left|z-2-4i\right|=\left|z-2i\right|$ và $m=min\left|z\right|$. Tính module số phức $\mathrm{w}=m-(x+y)i$.

A. $\left|w\right|=2\sqrt{3}$ B. $\left|w\right|=3\sqrt{2}$ C. $\left|w\right|=5$ D. $\left|w\right|=2\sqrt{6}$

- **Cách 1:**
  - $\left|z-2-4i\right|=\left|z-2i\right|\Leftrightarrow x+y=4$
  - $\left|z\right|=\sqrt{x^2+y^2}\ge\sqrt{\frac{\left(x+y\right)^2}{2}}=\sqrt{\frac{4^2}{2}}=2\sqrt{2}$
  - $min\left|z\right|=2\sqrt{2}$, Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}x+y=4\\x=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}\Rightarrow \mathrm{w}=2\sqrt{2}-4i\Rightarrow\left|\mathrm{w}\right|=2\sqrt{6}$

Chú ý: Với mọi x, y là số thực ta có: $x^2+y^2\ge\frac{\left(x+y\right)^2}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y$

- **Cách 2:**
  - $\left|z-2-4i\right|=\left|z-2i\right|\Leftrightarrow y=4-x$
  - $\left|z\right|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+\left(4-x\right)^2}=\sqrt{2\left(x-2\right)^2+8}\ge2\sqrt{2}$
  - $min\left|z\right|=2\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}x+y=4\\x=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}\Rightarrow \mathrm{w}=2\sqrt{2}-4i\Rightarrow\left|\mathrm{w}\right|=2\sqrt{6}$

Bài 5: Cho số phức $z=x+yi\ \left(x,y\in R\right)$ thỏa mãn $\left|z+i+1\right|=\left|\bar{z}-2i\right|$. Tìm môđun nhỏ nhất của z.

A. $min\left|z\right|=\sqrt{2}$ B. $min\left|z\right|=1$ C. $min\left|z\right|=0$ D. $min\left|z\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}$

- **Cách 1:**
- $\left|z+i+1\right|=\left|\bar{z}-2i\right|\Leftrightarrow x-y=1$
- $x^2+y^2\ge\frac{\left(x-y\right)^2}{2}=\frac{1}{2}$
- $\left|z\right|=\sqrt{x^2+y^2}\ge\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Chú ý: Với mọi x, y là số thực ta có: $x^2+y^2\ge\frac{\left(x-y\right)^2}{2}$

- **Cách 2:**

- ❖ $|z+i+1|=|\bar{z}-2i|\Leftrightarrow y=x-1$
- ❖ $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(x-1)^2}=\sqrt{2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\geq\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$
- ❖ Vậy $min|z|=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Bài 6: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=|z^3+3z+\bar{z}|-|z+\bar{z}|$. Tính $M+m$

A. $\frac{7}{4}$ B. $\frac{13}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{15}{4}$

Sáng tác: Phạm Minh Tuấn

- ➢ **Cách 1:**
- ❖ Ta có $|z|^2=1\Leftrightarrow z.\bar{z}=1$
- ❖ Đặt $t=|z+\bar{z}|\in[0;2]\Rightarrow t^2=(z+\bar{z})(\bar{z}+z)=z^2+2z.\bar{z}+\bar{z}^2=2+z^2+\bar{z}^2$
- ❖ $|z^3+3z+\bar{z}|=|z||z^2+3+\bar{z}^2|=|t^2+1|=t^2+1$
- ❖ $P=t^2-t+1\geq\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}$
- ❖ Vậy $minP=\frac{3}{4}$; $maxP=3$ khi $t=2$
- ❖ $M+n=\frac{15}{4}$
- ➢ **Cách 2:** Cách này của bạn Trịnh Văn Thoại
- ❖ $P=|z^3+3z+\bar{z}|-|z+\bar{z}|=\frac{|z^3+3z+\bar{z}|}{|z|}-|z+\bar{z}|=|z^2+3+\bar{z}^2|-|z+\bar{z}|=|(z+\bar{z})^2+1|-|z+\bar{z}|$
- ❖ $P=|z+\bar{z}|^2+1-|z+\bar{z}|\geq\frac{3}{4}$. Đến đây các bạn tự tìm max nhé

Bài 7: Cho các số phức a,b,c,z thỏa $az^2+bz+c=0$ $(a\neq 0)$. Gọi z_1 và z_2 lần lượt là hai nghiệm của phương trình bậc hai đã cho. Tính giá trị của biểu thức

$P=|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2-2(|z_1|-|z_1|)^2$

A. $P=2\left|\frac{c}{a}\right|$

B. $P=\left|\frac{c}{a}\right|$

C. $P=4\left|\frac{c}{a}\right|$

D. $P=\frac{1}{2}.\left|\frac{c}{a}\right|$

➢ **Giải:**

❖ Ta có : $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})+(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})=2|z_1|^2+2|z_2|^2$

❖ Khi đó $P=4|z_1z_2|$

❖ Ta lại có: $z_1z_2=\frac{c}{a}\Rightarrow P=4|z_1z_2|=4\left|\frac{c}{a}\right|$

Bài 8: Cho 3 số phức z_1,z_2,z_3 thỏa mãn $z_1+z_2+z_3=0$ và $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2$ là số thuần ảo

B. $|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2$ là số nguyên tố

C. $|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2$ là số thực âm

D. $|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2$ là số 1

❖ Chứng minh công thức:

✓ $|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+|z_1+z_2+z_3|^2$

❖ Ta có: $|z|^2=z.\overline{z}$ và $\overline{z_1+z_2+...+z_n}=\overline{z_1}+\overline{z_2}+...+\overline{z_n}$. Áp dụng tính chất này ta có vế trái:

$$=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})+(z_2+z_3)(\overline{z_2}+\overline{z_3})+(z_3+z_1)(\overline{z_3}+\overline{z_1})$$
$$=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_3\overline{z_3}+z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_3\overline{z_3}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_3}+z_3\overline{z_2}+z_3\overline{z_1}+z_1\overline{z_3}$$
$$=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+z_1(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3})+z_2(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3})+z_3(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3})$$
$$=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+(z_1+z_2+z_3)(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3})$$
$$=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+|z_1+z_2+z_3|^2$$

❖ Áp dụng công thức đã chứng minh suy ra: $|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2=3$ là số nguyến số

Bài 9: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn hai điều kiện $|z|=1$ và $\left|\frac{z}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}}{z}\right|=1$?

A . 5 B. 6 C. 7 D. 8

- **Giải:**
- Ta có: $|z|^2=1=z.\overline{z}$
- Đặt $z=\cos x+i\sin x, x\in[0;2\pi]\Rightarrow z^2=\cos 2x+i\sin 2x$
- $\left|\frac{z}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}}{z}\right|=1\Leftrightarrow\left|\frac{z^2+\overline{z}^2}{z.\overline{z}}\right|=1\Leftrightarrow 2|\cos 2x|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=\frac{1}{2}\\ \cos 2x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$
- Giải 2 phương trình lượng giác trên với $x\in[0;2\pi]$ nên ta chọn được các giá trị $x=\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6};\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6};\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right\}$
- Vậy có 8 số phức thỏa 2 điều kiện đề cho

Bài 10: Cho các số phức z_1,z_2,z_3 thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1999$ và $z_1+z_2+z_3\neq 0$. Tính $P=\left|\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\right|$.

A. $P=1999$ $P=999,5$

B. $P=1999^2$ $P=5997$

- **Giải**
- $P^2=\left(\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\right)\left(\frac{\overline{z_1}.\overline{z_2}+\overline{z_2}.\overline{z_3}+\overline{z_3}.\overline{z_1}}{\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}}\right)$
- Mặc khác: $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1999\Leftrightarrow z_1\overline{z_1}=z_2\overline{z_2}=z_3\overline{z_3}=1999^2\Rightarrow\begin{cases}\overline{z_1}=\frac{1999^2}{z_1}\\ \overline{z_2}=\frac{1999^2}{z_2}\\ \overline{z_3}=\frac{1999^2}{z_3}\end{cases}$

- Suy ra $P^2 = \left(\dfrac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\right)\left(\dfrac{\dfrac{1999^2}{z_1}.\dfrac{1999^2}{z_2}+\dfrac{1999^2}{z_2}.\dfrac{1999^2}{z_3}+\dfrac{1999^2}{z_3}.\dfrac{1999^2}{z_1}}{\dfrac{1999^2}{z_1}+\dfrac{1999^2}{z_2}+\dfrac{1999^2}{z_3}}\right)=1999^2$
- $P=1999$
- **Tổng quát:** $|z_1|=|z_2|=|z_3|=k \Rightarrow |z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|=k|z_1+z_2+z_3|$

Bài 11: Cho số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{3-3\sqrt{2}i}{1+2\sqrt{2}i}z-1-\sqrt{2}i\right|=\sqrt{3}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-3-3i|$. Tính $M.m$

A) $M.n=25$ B) $M.n=20$ C) $M.n=24$ D) $M.n=30$

- **Dạng tổng quát:** Cho số phức z thỏa mãn $|z_1z-z_2|=r$. Tính Min, Max của $|z-z_3|$. Ta có $Max=\left|\dfrac{z_2}{z_1}-z_3\right|+\dfrac{r}{|z_1|}; Min=\left|\dfrac{r}{|z_1|}-\left|\dfrac{z_2}{z_1}-z_3\right|\right|$
- Áp dụng Công thức trên với $z_1=\dfrac{3-3\sqrt{2}i}{1+2\sqrt{2}i}; z_2=1+\sqrt{2}i, z_3=3+3i; r=\sqrt{3}$ ta được $Max=6; Min=4$

Bài tập áp dụng:

1) Cho số phức z thỏa mãn $|z-2+2i|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính $M.m$

A) $M.n=7$ B) $M.n=5$ C) $M.n=2$ D) $M.n=4$

2) Cho số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{1+2i}{1-i}z-2\right|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z+i|$. Tính $M.m$

A) $M.n=\dfrac{1}{5}$ B) $M.n=\dfrac{1}{3}$ C) $M.n=\dfrac{1}{10}$ D) $M.n=\dfrac{1}{4}$

3) Cho số phức z thỏa mãn $\left|\frac{z}{i+2}-i^{4n+1}\right|=i^{4n}$ với $n\in\mathbb{N}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z-3+i|$. Tính $M.m$

A) $M.n=20$ B) $M.n=15$ C) $M.n=24$ D) $M.n=30$

Bài 12: Cho số phức z thỏa mãn $|z+1|+|z-1|=4$. Gọi $m=min|z|$ và $M=max|z|$, khi đó $M.n$ bằng:

A. 2 B. $2\sqrt{3}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ $\sqrt{3}$

- **Giải:**
- **Dạng Tổng quát:** $|z_1z+z_2|+|z_1z-z_2|=k$ với $z_1=a+bi;z_2=c+di;z=x+yi$

- Ta có: $Min|z|=\frac{\sqrt{k^2-4|z_2|^2}}{2|z_1|}$ và $Max|z|=\frac{k}{2|z_1|}$
- **Chứng minh công thức:**
- Ta có: $k=|z_1z+z_2|+|z_1z-z_2|\geq|z_1z+z_2+z_1z-z_2|=|2z_1z|\Leftrightarrow|z|\leq\frac{k}{2|z_1|}$. Suy ra

$Max|z|=\frac{k}{2|z_1|}$

- Mặc khác:
- $|z_1z+z_2|+|z_1z-z_2|=k\Leftrightarrow\sqrt{(ax-by+c)^2+(ay+bx+d)^2}+\sqrt{(ax-by-c)^2+(ay+bx-d)^2}=k$

- Áp dụng BĐT Bunhiacopxki ta có:

$$k=1.\sqrt{(ax-by+c)^2+(ay+bx+d)^2}+1.\sqrt{(ax-by-c)^2+(ay+bx-d)^2}$$

$$\leq\sqrt{(1^2+1^2)\left[(ax-by+c)^2+(ay+bx+d)^2+(ax-by-c)^2+(ay+bx-d)^2\right]}$$

$$=\sqrt{4(a^2+b^2)(x^2+y^2)+4(c^2+d^2)}$$

- Suy ra $\left|z\right|=\sqrt{x^2+y^2}\geq\sqrt{\dfrac{k^2-4\left(c^2+d^2\right)}{4\left(a^2+b^2\right)}}=\dfrac{\sqrt{k^2-4\left|z_2\right|^2}}{2\left|z_1\right|}$
- ADCT trên ta có: $z_1=1;z_2=1;k=4\Rightarrow\begin{cases}m=\dfrac{\sqrt{4^2-4}}{2}=\sqrt{3}\\M=\dfrac{4}{2}=2\end{cases}$

Bài 13: Cho số phức z thỏa mãn $\left|iz+\dfrac{2}{1-i}\right|+\left|iz-\dfrac{2}{1-i}\right|=4$. Gọi $m=min\left|z\right|$ và $M=max\left|z\right|$, khi đó $M.n$ bằng:

A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. 1

- ADCT **Câu 12** ta có: $z_1=i;z_2=\dfrac{2}{1-i};k=4\Rightarrow\begin{cases}m=\sqrt{2}\\M=2\end{cases}$

Bài 14: Cho các số phức z_1,z_2,z_3 thỏa mãn $z_1z_2z_3=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2+\left|z_3\right|^2$.

A. $P_{\min}=1$ C. $P_{\min}=3$

B. $P_{\min}=\dfrac{1}{3}$ D. $P_{\min}=2$

- **Giải:**
- Áp dụng BĐT AM-GM ta có: $P\geq 3\sqrt[3]{\left|z_1\right|^2.\left|z_2\right|^2.\left|z_3\right|^2}$
- Mặc Khác: $z_1z_2z_3=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\Leftrightarrow\left|z_1z_2z_3\right|=1\Leftrightarrow\left|z_1\right|\left|z_2\right|\left|z_3\right|=1$
- Suy ra $P\geq 3$. Dấu "=" xảy ra khi $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=\left|z_3\right|=1$

Bài 15: Cho số phức $z = x + yi$ với x, y là các số thực không âm thỏa mãn $\left|\frac{z-3}{z-1+2i}\right| = 1$ và biểu thức $P = \left|z^2 - \bar{z}^2\right| + i\left(z^2 - \bar{z}^2\right)\left[z(1-i) + \bar{z}(1+i)\right]$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của P lần lượt là:

A. 0 và -1

B. 3 và -1

C. 3 và 0

D. 2 và 0

➢ **Giải:**

❖ $\left|\frac{z-3}{z-1+2i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-3| = |z-1+2i| \Leftrightarrow x + y = 1$

❖ $P = 16x^2y^2 - 8xy$, Đặt $t = xy \Rightarrow 0 \le t \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

❖ $P = 16t^2 - 8t, t \in \left[0; \frac{1}{4}\right] \Rightarrow MaxP = 0; MinP = -1$

Bài 16: Cho các số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |1+z| + \left|1+z^2\right| + \left|1+z^3\right|$.

A. $P_{\min} = 1$

B. $P_{\min} = 4$

C. $P_{\min} = 3$

D. $P_{\min} = 2$

➢ **Giải:**

❖ Ta có: $|z| = 1 \Rightarrow |-z| = 1$

❖ $P = |1+z| + \left|1+z^2\right| + \left|1+z^3\right| = |1+z| + |-z|\left|1+z^2\right| + \left|1+z^3\right| \ge \left|1+z-z\left(1+z^2\right)+1+z^3\right| = 2$

Bài 17: Cho số phức z thỏa mãn $\left|\frac{6z-i}{2+3iz}\right| \le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$.

A. $max|z| = \frac{1}{2}$

C. $max|z| = \frac{1}{3}$

B. $max|z| = \frac{3}{4}$ D. $max|z| = 1$

➢ **Giải:**

$\left|\frac{6z-i}{2+3iz}\right| \le 1 \Leftrightarrow |6z-i| \le |2+3iz| \Leftrightarrow |6z-i|^2 \le |2+3iz|^2$

$(6z-i)(\overline{6z-i}) \le (2+3iz)(\overline{2+3iz}) \Leftrightarrow (6z-i)(6\bar{z}+i) \le (2+3iz)(2-3i\bar{z})$

$\Leftrightarrow z.\bar{z} \le \frac{1}{9} \Leftrightarrow |z|^2 \le \frac{1}{9} \Leftrightarrow |z| \le \frac{1}{3}$

Bài 18: Cho $z = a+bi, (a, b \in \mathbb{R})$ thỏa $|z^2+4| = 2|z|$ và $P = 8(b^2-a^2)-12$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P = (|z|^2-2)^2$ C. $P = (|z|-2)^2$

B. $P = (|z|^2-4)^2$ D. $P = (|z|-4)^2$

➢ **Giải:**

❖ $|z^2+4| = 2|z| \Leftrightarrow (a^2-b^2+4)^2 + (2ab)^2 - 4(a^2+b^2) = 0$

❖ Chuẩn hóa $b = 0 \Rightarrow a^4+4a^2+16 = 0 \Rightarrow a = -1-i\sqrt{3} \Rightarrow z = -1-i\sqrt{3} \Rightarrow P = 4$

❖ Thử đáp án: - ĐÁP ÁN A: $P = \left(\left|-1-i\sqrt{3}\right|^2-2\right)^2 = 4 \Rightarrow$ Nhận

Bài 19: Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-3i| = 1$. Gọi $M = max|\bar{z}+1+i|$, $m = min|\bar{z}+1+i|$. Tính giá trị của biểu thức (M^2+n^2).

A. $M^2+m^2 = 28$ C. $M^2+m^2 = 26$

B. $M^2+m^2 = 24$ D. $M^2+m^2 = 20$

➢ **Giải:**

❖ $|z-2-3i| = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 1 \quad (1)$

❖ Đặt $P=\left|\bar{z}+1+i\right|\Rightarrow\left(x+1\right)^2+\left(y-1\right)^2=P^2$ (2) với $P>0$

❖ Lấy (1)-(2) ta được: $y=\dfrac{P^2+10-6x}{4}$. Thay vào (1) :

❖ $\left(x-2\right)^2+\left(\dfrac{P^2+10-6x}{4}-3\right)^2=1\Leftrightarrow 52x^2-\left(40+12P^2\right)x+\left(P^4-4P^2+52\right)=0$ (*)

❖ Để PT (*) có nghiệm thì:
$\Delta=\left(40+12P^2\right)^2-4.52.\left(P^4-4P^2+52\right)\geq 0\Leftrightarrow\sqrt{14-2\sqrt{13}}\leq P\leq\sqrt{14+2\sqrt{13}}$

❖ Vậy $M=\sqrt{14+2\sqrt{13}}, m=\sqrt{14-2\sqrt{13}}\Rightarrow M^2+m^2=28$

Bài 20: Cho số thức $z\in\mathbb{C}^*$ thỏa mãn $\left|z^3+\dfrac{1}{z^3}\right|\leq 2$ và $M=max\left|z+\dfrac{1}{z}\right|$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $-1<M<2$

B. $1<M<\dfrac{5}{2}$

C. $2<M<\dfrac{7}{2}$

D. $M^3+M^2+M<3$

➢ **Giải:**

❖ $\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^3=z^3+\dfrac{1}{z^3}+3\left(z+\dfrac{1}{z}\right)\Leftrightarrow z^3+\dfrac{1}{z^3}=\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^3-3\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$

$\Leftrightarrow\left|z^3+\dfrac{1}{z^3}\right|=\left|\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^3-3\left(z+\dfrac{1}{z}\right)\right|\Leftrightarrow\left|\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^3-3\left(z+\dfrac{1}{z}\right)\right|\leq 2$

❖ Mặt khác: $\left|\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^3-3\left(z+\dfrac{1}{z}\right)\right|\geq\left|z+\dfrac{1}{z}\right|^3-3\left|z+\dfrac{1}{z}\right|$

❖ Suy ra: $\left|z+\dfrac{1}{z}\right|^3-3\left|z+\dfrac{1}{z}\right|\leq 2$, đặt $t=\left|z+\dfrac{1}{z}\right|\geq 0$, ta được:

❖ $t^3-3t-2\leq 0\Leftrightarrow\left(t-2\right)\left(t+1\right)^2\leq 0\Rightarrow t\leq 2\Rightarrow\left|z+\dfrac{1}{z}\right|\leq 2\Rightarrow M=2$

Bài 21: Cho số phức z thỏa mãn $(z-3+i)(1-i)=(1+i)^{2017}$. Khi đó số thức $\mathrm{w}=z+1-i$ có phần ảo bằng:

A. $\Im(z)=2^{1008}-1$

B. $\Im(z)=2^{1008}-3$

C. $\Im(z)=2^{1008}$

D. $\Im(z)=2^{1008}-2$

➢ **Giải:**

❖ $(z-3+i)(1-i)=(1+i)^{2017} \Leftrightarrow (z-3+i)(1-i)(1+i)=(1+i)^{2018}$

❖ $\Leftrightarrow z=\dfrac{\left[(1+i)^2\right]^{1009}}{(1-i)(1+i)}+3-i=\dfrac{[2i]^{1009}}{2}+3-i=2^{1008}i+3-i$

❖ $w=2^{1008}i+3-i+1-i=4+\left(2^{1008}-2\right)i \Rightarrow \Im(z)=2^{1008}-2$

Bài 22: Cho số phức z thỏa mãn $\left(1-\sqrt{5}i\right)|z|=\dfrac{2\sqrt{42}}{z}+\sqrt{3}i+\sqrt{15}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng:

A. $\dfrac{1}{2}<|z|<2$

B. $\dfrac{3}{2}<|z|<3$

C. $\dfrac{5}{2}<|z|<4$

D. $3<|z|<5$

➢ **Giải:**

❖
$$\left(1-\sqrt{5}i\right)|z|=\frac{2\sqrt{42}}{z}+\sqrt{3}i+\sqrt{15}$$
$$\Leftrightarrow \left(1-\sqrt{5}i\right)|z|-\sqrt{3}i\left(1-\sqrt{5}i\right)=\frac{2\sqrt{42}}{z}$$
$$\Leftrightarrow \left(1-\sqrt{5}i\right)\left(|z|-\sqrt{3}i\right)=\frac{2\sqrt{42}}{z} \Leftrightarrow \left|1-\sqrt{5}i\right|\left||z|-\sqrt{3}i\right|=\frac{2\sqrt{42}}{|z|}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{6}.\sqrt{|z|^2+3}=\frac{2\sqrt{42}}{|z|} \Leftrightarrow 6\left(|z|^2+3\right).|z|^2-4.42=0 \Leftrightarrow |z|=2$$

Bài 23: Cho ba số phức z, z_1, z_2 thỏa mãn $|2z-i|=|2+iz|$ và $|z_1-z_2|=1$. Tính giá trị của biểu thức $P=|z_1+z_2|$.

A. $P=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ C. $P=\sqrt{2}$

B. $P=\sqrt{3}$ D. $P=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

➢ **Giải:**

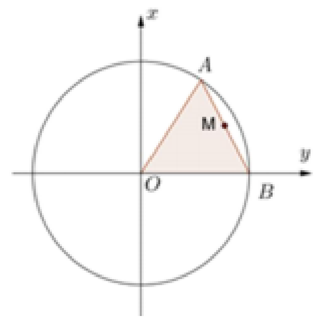
❖ Đặt $z=x+yi$, $|2z-i|=|2+iz|\Rightarrow x^2+y^2=1$

❖ Gọi A, B là hai điểm biểu diễn z_1,z_2.

❖ Ta có $|z_1-z_2|=\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|=1$

❖ Suy ra $AB=OA=OB$ hay tam giác OAB đều.

❖ $P=|z_1+z_2|=\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=\left|2\overrightarrow{OM}\right|=\left|2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{3}$



Bài 24: Cho ba số phức z_1,z_2,z_3 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ và $z_1+z_2+z_3=0$. Tính giá trị của biểu thức $P=z_1^2+z_2^2+z_3^2$.

A. $P=1$ C. $P=-1$

B. $P=0$ D. $P=1+i$

➢ **Giải:** Chuẩn hóa $z_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i, z_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i, z_3=-1$ Suy ra $P=0$

Bài 25: Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $z_1+z_2=8+6i$ và $|z_1-z_2|=2$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z_1|+|z_2|$.

A. $P_{\max}=5+3\sqrt{5}$ C. $P_{\max}=4\sqrt{6}$

B. $P_{\max}=2\sqrt{26}$ D. $P_{\max}=34+3\sqrt{2}$

➢ **Giải:**

❖ Ta có: $z_1+z_2=8+6i\Rightarrow|z_1+z_2|=10$

❖ $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)\Rightarrow 52=|z_1|^2+|z_2|^2\geq\dfrac{\left(|z_1|+|z_2|\right)^2}{2}\Rightarrow|z_1|+|z_2|\leq\sqrt{2.52}=2\sqrt{26}$

Bài 26. Cho z_1, z_2, z_3 là các số phức thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Khẳng định nào dưới đây là sai.

A. $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| = |z_1^3| + |z_2^3| + |z_3^3|$

B. $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| \le |z_1^3| + |z_2^3| + |z_3^3|$

C. $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| \ge |z_1^3| + |z_2^3| + |z_3^3|$

D. $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| \ne |z_1^3| + |z_2^3| + |z_3^3|$

- **Giải:** Chuẩn hóa $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_3 = -1$ Suy ra đáp áp D

Bài 27: Cho z_1, z_2, z_3 là các số phức thoả mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$

B. $|z_1 + z_2 + z_3| > |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$

C. $|z_1 + z_2 + z_3| < |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$

D. $|z_1 + z_2 + z_3| \ne |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$

- **Giải:** Chuẩn hóa $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_3 = -1$ Suy ra đáp áp A

Bài 28: Cho z_1, z_2, z_3 là các số phức thoả mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và $z_1 + z_2 + z_3 = 1$. Biểu thức $P = z_1^{2n+1} + z_2^{2n+1} + z_3^{2n+1}$, $(n \in \mathbb{Z}^+)$ nhận giá trị nào sao đây?

A. 1

B. 2

C. 4

D. 3

- **Giải:** Chuẩn hóa $n = 1, z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -i$ Suy ra đáp áp A

Bài 29: Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{|z_1 - z_2||z_1 - z_3|} + \frac{1}{|z_2 - z_1||z_2 - z_3|} + \frac{1}{|z_3 - z_1||z_3 - z_2|}$.

A. $P_{\min} = \frac{3}{4}$

C. $P_{\min} = \frac{1}{2}$

B. $P_{\min} = 1$

D. $P_{\min} = \frac{5}{2}$

- **Giải:**

❖ $|z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_1|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) + (z_2 - z_3)(\overline{z_2} - \overline{z_3}) + (z_3 - z_1)(\overline{z_3} - \overline{z_1})$

$$= 9 - \left(z_1 + z_2 + z_3\right)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}\right)$$
$$= 9 - \left|z_1 + z_2 + z_3\right|^2$$

❖ Theo BĐT Cauchy- Schwarz:

$$P \ge \frac{9}{\left|z_1 - z_2\right|\left|z_1 - z_3\right| + \left|z_2 - z_1\right|\left|z_2 - z_3\right| + \left|z_2 - z_1\right|\left|z_2 - z_3\right|} \ge \frac{9}{\left|z_1 - z_2\right|^2 + \left|z_2 - z_3\right|^2 + \left|z_3 - z_1\right|^2} = \frac{9}{9 - \left|z_1 + z_2 + z_3\right|^2}$$

❖ Do đó: $P \ge \frac{9}{9} = 1$ (do $\left|z_1 + z_2 + z_3\right|^2 \ge 0$)

Bài 30: Cho ba số phức z thỏa mãn $|z| \le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \left|\frac{2z - i}{2 + iz}\right|$:

A. $P_{max} = 1$

B. $P_{max} = \frac{1}{2}$

C. $P_{max} = \frac{3}{4}$

D. $P_{max} = 2$

➢ **Giải:** Chuẩn hóa $|z| \le 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 \\ z = 0 \end{array}\right.$

❖ $z = 1 \Rightarrow P = \left|\frac{2 - i}{2 + i}\right| = 1$ do đó loại B, C

❖ $z = 0 \Rightarrow P = \left|\frac{-i}{2}\right| = \frac{1}{2}$ do đó loại D, chọn đáp án A

Bài 31: Cho 3 số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ và $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\left|z_1 + z_2\right|^2 + \left|z_2 + z_3\right|^2 + \left|z_3 + z_1\right|^2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

B. $\left|z_1 + z_2\right|^2 + \left|z_2 + z_3\right|^2 + \left|z_3 + z_1\right|^2 = \frac{8}{3}$

C. $\left|z_1 + z_2\right|^2 + \left|z_2 + z_3\right|^2 + \left|z_3 + z_1\right|^2 = 2\sqrt{2}$

D. $\left|z_1 + z_2\right|^2 + \left|z_2 + z_3\right|^2 + \left|z_3 + z_1\right|^2 = 1$

- **Giải:** $\left|z_1+z_2\right|^2+\left|z_2+z_3\right|^2+\left|z_3+z_1\right|^2=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2+\left|z_3\right|^2+\left|z_1+z_2+z_3\right|^2=\frac{8}{3}$

Bài 32: Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn $|z-i|\ge 3$ và $|z-2-2i|\le 5$. Kí hiệu z_1, z_2 là hai số phức thuộc S và là những số phức có môđun lần lượt nhỏ nhất và lớn nhất. Tính giá trị của biểu thức $P=\left|z_2+2z_1\right|$.

A. $P=2\sqrt{6}$

B. $P=3\sqrt{2}$

C. $P=\sqrt{33}$

D. $P=8$

- **Giải:**
- $3\le|z-i|\le|z|+1\Rightarrow|z|\ge 2$
  - Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases}x^2+(y-1)^2=9\\x^2+y^2=4\end{cases}\Leftrightarrow z_1=-2i$
- $|z|-2\sqrt{2}\le|z-2-2i|\le 5\Rightarrow|z|\le 5+2\sqrt{2}$
  - Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2=25\\x^2+y^2=33+20\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow z_2=\frac{4+5\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{4+5\sqrt{2}}{2}\right)i$
- $P=\left|\frac{4+5\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{4+5\sqrt{2}}{2}\right)i-4i\right|=\sqrt{33}$

Bài 33: Gọi z là số phức có phần thực lớn hơn 1 và thỏa mãn $|z+1+i|=|2z+\bar{z}-5-3i|$ sao cho biểu thức $P=|z-2-2i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm phần thực của số phức z đó.

A. $\Re(z)=\frac{8+\sqrt{7}}{2}$

B. $\Re(z)=\frac{8+\sqrt{2}}{2}$

C. $\Re(z)=\frac{4+\sqrt{6}}{2}$

D. $\Re(z)=\frac{12+\sqrt{2}}{2}$

- **Giải:**
- $|z+1+i|=|2z+\bar{z}-5-3i|\Leftrightarrow y=(x-2)^2$
- $P=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=\sqrt{y+(y-2)^2}=\sqrt{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}\ge\sqrt{\frac{7}{4}}$

❖ Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases} y = \dfrac{3}{2} \\ y = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow z = \dfrac{4+\sqrt{6}}{2} + \dfrac{3}{2}i$

Bài 34: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z^3 - z + 2|$.

A. $P_{\max} = \dfrac{\sqrt{11}}{2}$ B. $P_{\max} = 2\sqrt{3}$ C. $P_{\max} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$ D. $P_{\max} = 3\sqrt{5}$

➢ **Giải:**

Câu 35: Cho phương trình: $z^3 + az^2 + bz + c = 0$, $(a,b,c \in \mathbb{R})$. Nếu $z_1 = 1 + i, z_2 = 2$ là hai nghiệm của phương trình thì $a+b+c$ bằng:

A. -2 B. -1 C. 0 D. 1

Bài 36: Cho số phức z thỏa mãn $11z^{10} + 10iz^9 + 10iz - 11 = 0$.Tính $|z|$.

A. $|z| = \dfrac{1}{2}$ B. $|z| = \dfrac{3}{4}$ C. $P_{\max} = 1$ D. $P_{\max} = 2$

Bài 37: Cho phương trình: $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$, $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ có bốn nghiệm phức là z_1, z_2, z_3, z_4. Biết rằng $z_1 z_2 = 13 + i, z_3 + z_4 = 3 + 4i$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $b > 53$ B. $b < 50$ C. $b < 55$ D. $b < 51$

Bài 38: Cho số phức z thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và $z_1 + z_2 z_3; z_2 + z_3 z_1; z_3 + z_1 z_2$ là các số thực. Tính $(z_1 z_2 z_3)^{2017}$.

A. 1 C. ± 1

B. -2^{2017} D. 2^{2017}

Bài 39: Cho số phức z thỏa mãn đồng thời $z + \bar{z} = 2$ và $z + 3\bar{z} = (2 + i\sqrt{3})|z|$. Khẳng định nào sao đây đúng?

A. $\dfrac{1}{2} < |z| < 2$ C. $\dfrac{5}{2} < |z| < 4$

B. $\frac{3}{2}<|z|<3$

D. $3<|z|<5$

Bài 40: Cho z_1,z_2,z_3,z_4 là nghiệm phức của phương trình: $\left(\frac{z-1}{2z-i}\right)^4=1$. Tính giá trị của biểu thức $P=\left(z_1^2+1\right)\left(z_2^2+1\right)\left(z_3^2+1\right)\left(z_4^2+1\right)$:

A. $P=1$

C. $P=\frac{18}{5}$

B. $P=-1$

D. $P=\frac{17}{9}$

Bài 41: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|z^3+1\right|+\left|z^2+z+1\right|$. Tính $M+m$.

A. 2 B.7 C.6 D. 5

Bài 42: Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $\frac{|z_1+z_2|}{|z_1|+|z_2|}=\frac{1}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$P=\left|\frac{z_1}{|z_1|}+\frac{z_2}{|z_2|}\right|$.

A. 2 B.0,75 C.0,5 D. 1

Bài 43: Trong mặt phẳng phức với gốc tọa độ O, cho hai điểm A, B (khác O) biểu diễn hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $z_1^2+z_2^2=z_1z_2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. ΔOAB vuông cân tại A
B. ΔOAB đều
C. ΔOAB cân, không đều
D. ΔOAB cân tại A

Bài 44: Cho ba số phức z_1,z_2,z_3 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=|z_3|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ và $z_1+z_2+z_3=0$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z_1+z_2|+2|z_2+z_3|+2|z_3+z_1|$.

A. $P_{\max} = \frac{7\sqrt{2}}{3}$

B. $P_{\max} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

C. $P_{\max} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$

D. $P_{\max} = \frac{10\sqrt{2}}{3}$

➢ **Giải:**

❖ $|z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2 = \frac{3}{2}$

❖ Theo BĐT Bunhiacôpxki ta có:

$$P = |z_1 + z_2| + 2|z_2 + z_3| + 2|z_3 + z_1| \le \sqrt{\left(1 + 2^2 + 2^2\right)\left(|z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2\right)} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

Bài 45: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z^2 + 1| + |1 - z|$. Tính $P = M^2 + n^2$

A. 12

B. 20

C. 15

D. 18

Bài 46: Cho bốn số phức a, b, c, z thỏa mãn $az^2 + bz + c = 0$ và $|a| = |b| = |c| > 0$. Gọi $M = max|z|, m = min|z|$. Tính môđun của số phức $w = M + mi$.

A. $|w| = \sqrt{2}$

B. $|w| = 2$

C. $|w| = \sqrt{3}$

D. $|w| = 1$

Bài 47: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1| = \sqrt{2}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + i| + |z - 2 - i|$. Tính môđun của số phức $w = M + mi$.

A. $|w| = 2\sqrt{6}$

B. $|w| = 4\sqrt{2}$

C. $|w| = 3\sqrt{5}$

D. $|w| = 4$

➢ Giải:

❖ $|z - 1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 2$

- $P=\sqrt{x^2+(y+1)^2}+\sqrt{(2-x)^2+(1-y)^2}\overset{vecto}{\geq}\sqrt{(x+2-x)^2+(y+1+1-y)^2}=2\sqrt{2}$
- $P=\sqrt{x^2+(y+1)^2}+\sqrt{(2-x)^2+(1-y)^2}\overset{bunhiacopxki}{\leq}\sqrt{2.2\left[(x-1)^2+y^2+2\right]}=4$
- $|w|=\left|4+2\sqrt{2}i\right|=2\sqrt{6}$

Bài 48: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1+z_2=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$, $|z_1-z_2|=\sqrt{3}$ và biểu thức $P=4|z_1|^3+4|z_2|^3-3|z_1|-3|z_2|+5$ đạt giá trị nhỏ nhất . Tính $|z_1|+|z_2|$.

A. 1

B. $\frac{3}{4}$

C. 2

D. $\sqrt{3}$

- **Giải:**
- Ta có: $|z_1+z_2|=1; \sqrt{3}=|z_1-z_2|\leq|z_1|+|z_2|$
- $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)\Rightarrow 2=|z_1|^2+|z_2|^2\geq\frac{\left(|z_1|+|z_2|\right)^2}{2}\Rightarrow\sqrt{3}\leq|z_1|+|z_2|\leq 2$
- $P=4\left(|z_1|^3+|z_2|^3\right)-3\left(|z_1|+|z_2|\right)+5\geq\left(|z_1|+|z_2|\right)^3-3\left(|z_1|+|z_2|\right)+5$
- Xét hàm số: $f(t)=t^3-3t+5, t\in\left[\sqrt{3};2\right]; f'(t)=3t^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-1\end{array}\right.$
- Do đó $minf(t)=3\ \Rightarrow\ minP=3$
- Dấu "=" xảy ra khi $|z_1|+|z_2|=1$

Bài 49: Cho số phức z thỏa mãn $\left|z+\frac{3}{z}\right|=3\sqrt{2}$. Gọi $M=max|z|^2$ và $m=min|z|^2$, tính môđun của số phức $w=M+mi$.

A. $|w|=4\sqrt{22}$

B. $|w|=7\sqrt{56}$

C. $|w|=5\sqrt{10}$

D. $|w|=3\sqrt{62}$

➢ **Giải:**

$$\left|z+\frac{3}{z}\right|=3\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{\left|z^2+3\right|^2}{|z|^2}=18\Leftrightarrow\frac{\left(z^2+3\right)\left(\overline{z^2}+3\right)}{|z|^2}=18\Leftrightarrow\frac{|z|^4+3\left(z+\overline{z}\right)^2-6|z|^2+9}{|z|^2}=18$$

$$\Leftrightarrow\frac{|z|^4-6|z|^2+9}{|z|^2}\le 18\Leftrightarrow 12-3\sqrt{15}\le|z|^2\le 12+3\sqrt{15}$$

Do đó: $|w|=3\sqrt{62}$

Bài 50: Cho số phức z thỏa mãn $\left|z^2-2z+5\right|=\left|(z-1+2i)(z+3i-1)\right|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-2+2i|$.

A. $P_{\min}=\frac{1}{2}$

B. $P_{\min}=1$

C. $P_{\min}=2$

D. $P_{\min}=\frac{3}{2}$

Bài 51: Cho số phức z thỏa mãn $|z|\ge 2$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của của biểu thức $P=\left|\frac{z+i}{z}\right|$. Tính giá trị của biểu thức M.n :

A. $\frac{1}{4}$

B. 2

C. 1

D. $\frac{3}{4}$

Bài 52: Cho số phức z thỏa mãn $\left|z^2+4\right|=2|z|$. Gọi $M=max|z|$ và $m=min|z|$, tính môđun của số phức $w=M+mi$.

A. $|w|=2\sqrt{3}$

B. $|w|=\frac{\sqrt{6}}{3}$

C. $|w|=\sqrt{14}$

D. $|w|=\frac{\sqrt{2}}{3}$

Bài 53: Cho số phức $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ là số phức thỏa mãn hai điều kiện $|z+2|^2 + |z-2|^2 = 26$ và biểu thức $P = \left| z - \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} i \right|$ đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị của biểu thức (x.y)

A. $xy = \frac{9}{4}$

B. $xy = \frac{16}{9}$

C. $xy = \frac{9}{2}$

D. $xy = \frac{17}{2}$

Bài 54: Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $z_1 z_2 z_3 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{15}}{4} i$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{|z_1|} + \frac{1}{|z_2|} + \frac{1}{|z_3|} + \frac{6}{|z_1| + |z_2| + |z_3|}$.

A. $P_{\min} = 6$

B. $P_{\min} = 4$

C. $P_{\min} = 5$

D. $P_{\min} = 3$

Bài 55: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 + 1| + |z_2 + 1| + |z_1 z_2 + 1|$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\frac{7}{4} < m < 3$

B. $1 < m < \frac{11}{5}$

C. $3 < m < \frac{7}{2}$

D. $\frac{1}{4} < m < \frac{5}{2}$

Bài 56: Cho số phức $z = a + bi \neq 0$ sao cho z không phải là số thực và $w = \frac{z}{1 + z^3}$ là số thực. Tính $\frac{|z|^2}{1 + |z|^2}$.

A. $\frac{1}{3a+1}$

C. $\frac{1}{3a+2}$

B. $\frac{2}{a+2}$

D. $\frac{1}{2a+1}$

➢ **Giải:**

❖ Theo đề: $\frac{z}{1+z^3}-\frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^3}=0 \Leftrightarrow \left(z-\bar{z}\right)\left[1-|z|^2\left(z+\bar{z}\right)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0(Loai) \\ |z|^2=\frac{1}{2a} \end{array}\right.$

❖ $\frac{|z|^2}{1+|z|^2}=\frac{\frac{1}{2a}}{\frac{2a+1}{2a}}=\frac{1}{2a+1}$

Bài 57: Cho hai số phức z,w khác 0 và thỏa mãn $|z-w|=2|z|=|w|$. Gọi a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $u=\frac{z}{w}$. Tính $a^2+b^2=?$

A. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{7}{2}$

D. $\frac{1}{4}$

➢ **Giải:**

❖ Chuẩn hóa: $w=1$. Theo đề ta có:

$$\begin{cases} |z-1|=2|z| \\ |z-1|=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-1\right)^2+y^2=4\left(x^2+y^2\right) \\ \left(x-1\right)^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow z=\frac{1}{8}\pm\frac{\sqrt{15}}{8}i \Rightarrow u=\frac{1}{8}\pm\frac{\sqrt{15}}{8}i \Rightarrow a^2+b^2=\frac{1}{4}$$

Bài 58: Cho hai số phức z,w khác 0 và thỏa mãn $|z-w|=5|z|=|w|$. Gọi a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $u=z.w$. Tính $a^2+b^2=?$

A. $\frac{1}{50}$ C. $\frac{1}{100}$

C. $\frac{1}{25}$ D. $\frac{1}{10}$

➢ **Giải:**

❖ Chuẩn hóa: $w=1$. Theo đề ta có:

$$\begin{cases}|z-1|=5|z|\\|z-1|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2+y^2=25(x^2+y^2)\\(x-1)^2+y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow z=\frac{1}{50}\pm\frac{3\sqrt{11}}{50}i\Rightarrow u=\frac{1}{50}\pm\frac{3\sqrt{11}}{50}i\Rightarrow a^2+b^2=\frac{1}{25}$$

Bài 59: Cho số phức w và hai số thực a, b. Biết rằng $w+i$ và $2w-1$ là hai nghiệm của phương trình $z^2+az+b=0$. Tính $a+b=?$

A. $\frac{5}{9}$ C. $-\frac{5}{9}$

B. $-\frac{1}{9}$ D. $\frac{1}{9}$

➢ **Giải:**

❖ Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases}3w+i-1=-a\\(w+i)(2w-1)=b\end{cases}\Rightarrow\left(\frac{1-i-a}{3}+i\right)\left(\frac{2-2i-2a}{3}-1\right)=b$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2a^2}{9}-\frac{a}{9}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{2}{9}a+\frac{4}{9}\right)i=b\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{2a^2}{9}-\frac{a}{9}+\frac{1}{3}=b\\\frac{2}{9}a+\frac{4}{9}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=\frac{13}{9}\end{cases}\Rightarrow a+b=-\frac{5}{9}$$

Bài 60: Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn điều kiện $|z_1|=|z_2|=2017$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(\frac{z_1+z_2}{2017^2+z_1z_2}\right)^2+\left(\frac{z_1-z_2}{2017^2-z_1z_2}\right)^2$

A. $\frac{1}{2017}$ C. $\frac{2}{2017^2}$

B. $\frac{2}{2017}$ D. $\frac{1}{2017^2}$

Đặt $z_1 = 2017\left(\cos 2x + i\sin 2x\right)$ và $z_2 = 2017\left(\cos 2y + i\sin 2y\right)$

Ta có: $\dfrac{z_1 + z_2}{2017^2 + z_1z_2} = \dfrac{\cos 2x + i\sin 2x + \cos 2y + i\sin 2y}{2017\left[\left(1 + \cos(2x+2y) + i\sin(2x+2y)\right)\right]} = \dfrac{\cos\left(x-y\right)}{2017\cos\left(x+y\right)}$

Tương tự: $\dfrac{z_1 - z_2}{2017^2 - z_1z_2} = \dfrac{\sin\left(y-x\right)}{2017\sin\left(y+x\right)}$

Suy ra $P = \dfrac{\cos^2\left(x-y\right)}{2017^2\cos^2\left(x+y\right)} + \dfrac{\sin^2\left(x-y\right)}{2017^2\sin^2\left(y+x\right)}$

Vì $\begin{cases}\cos^2\left(x+y\right) \le 1\\ \sin^2\left(x+y\right) \le 1\end{cases}$ nên $P \ge \dfrac{1}{2017^2}\left[\cos^2\left(x-y\right) + \sin^2\left(x-y\right)\right] = \dfrac{1}{2017^2}$

Bài 61: Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn điều kiện $\left|z_1\right| = \left|z_2\right| = \left|z_3\right| = 1$ và $\dfrac{z_1^2}{z_2z_3} + \dfrac{z_2^2}{z_3z_1} + \dfrac{z_3^2}{z_1z_2} + 1 = 0$. Khẳng đinh nào sau đây đúng? .

A. $\left|z_1 + z_2 + z_3\right| = 3$

B. $\left|z_1 + z_2 + z_3\right| = \dfrac{1}{3}$

C. $\left|z_1 + z_2 + z_3\right| = 2$

D. $\left|z_1 + z_2 + z_3\right| = 4$

Bài 62: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z\right| = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 1008\left|1+z\right| + \left|1+z^2\right| + ... + \left|1+z^{2016}\right| + \left|1+z^{2017}\right|$

A. 2017

B. 1008

C. 2018

D. 2016

Bài 63: Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn điều kiện $\left|z_1\right| = \left|z_2\right| = \left|z_3\right| = 1$, $z_1 + z_2 + z_3 \ne 0$ và $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$. Khẳng đinh nào sau đây sai? .

A. $\left|z_1^{2017} + z_2^{2017} + z_1^{2017}\right| = 0$

C. $\left|z_1^{2017} + z_2^{2017} + z_1^{2017}\right| = 1$

B. $\left|z_1^{2017}+z_2^{2017}+z_1^{2017}\right|=3$

D. $\left|z_1^{2017}+z_2^{2017}+z_1^{2017}\right|=4$

Bài 64: Cho số phức $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ và $w=\dfrac{1+z+z^2}{1-z+z^2}$ là số thực. Khẳng đinh nào sau đây đúng? .

A. $0<|z|<2$

C. $1<|z|<3$

B. $2<|z|<4$

D. $3<|z|<5$

Bài 65: Cho ba số phức z_1,z_2,z_3 thỏa mãn điều kiện $z_1+z_2+z_3=0$ và $z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=0$.

Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{|z_1z_2|+|z_2z_3|+|z_3z_1|}{|z_2^2|}$

A. 3

C. 2

B. $\dfrac{1}{2}$

D. $\dfrac{1}{3}$